

PREDICCIÓ DELS PERÍODES DE LES SEQUES EXTERNES I INTERNES DE L'ESTANY DE BANYOLES

Emili Besalú, Jordi Mestres, Pere Vilardell i Xavier Casamitjana

Secció de Física i Institut d'Ecologia Aquàtica. Estudi General de Girona (UAB).
Hospital, 6. 17071-Girona.

RESUM

En aquest article es fa una predicció teòrica dels períodes de les seques externes i internes de l'estany de Banyoles utilitzant el mètode proposat per Mortimer (1979) i que es basa en un model unidimensional i iteratiu d'integració de les equacions de continuïtat i de moviment. La poca profunditat del llac fa que per a les seques internes s'hagin de considerar 4 zones diferents d'oscil·lació. El període de l'armònic fonamental per a les seques externes és de 6,9 min. Els harmònics fonamentals per a les seques internes a les quatre diferents zones valen: 2,7 hores, 1,89 hores, 1 hora i 35 min.

RESUMEN

En este trabajo se hace una predicción teórica de los períodos de las secas externas e internas del lago de Banyoles según el método propuesto por Mortimer (1979), basado en una integración unidimensional e iterativa de las ecuaciones de continuidad y de movimiento. Para el cálculo de las secas internas, debido a la poca profundidad del lago, éste se ha dividido en 4 zonas diferentes de oscilación. El período del armónico fundamental para las secas externas es de 6,9 min. Los armónicos fundamentales para las secas internas en las cuatro zonas diferentes valen: 2,7 horas, 1,89 horas, 1 hora y 35 min.

ABSTRACT

In this work a theoretical prediction of internal and external seiches periods in Banyoles lake has been done following Mortimer's (1979) stepwise integration method of one-dimensional equations of continuity and motion. To calculate internal seiches the lake has been divided in 4 diferents zones of oscillation. The period of the first (uninodal) external seiche mode is 6.9 min, and the periods of the first internal seiches modes in the 4 diferent zones are 2.7 hours, 1.89 hours, 1 hour and 35 min.

Key words: physical limnology, seiches, Banyoles lake.

INTRODUCCIÓ

L'estudi de les seques o moviments oscil·latoris estacionaris que s'esdevenen en els llacs és un tema clàssic dins la limnologia física. En aquest treball, utilit-

zarem el mètode iniciat per Defant (1918), i més tard recollit per Mortimer (1979) per fer una predicció teòrica dels períodes de les seques de l'estany de Banyoles.

Les seques externes són els moviments oscil·latoris estacionaris produïts a la superfície del llac. Es poden activar, per exemple, quan un vent persistent acumula una certa quantitat d'aigua a un dels extrems del llac i després para de bufar.

Les seques internes s'esdevenen en els llacs a l'època d'estratificació; són moviments oscil·latoris que es produeixen a la interfase que separa l'epilímnion de l'hipolímnion i tenen el seu origen en la diferència de densitats entre ambdós.

Seques externes

El mètode proposat per Mortimer (1979) consisteix a fer una integració de les equacions unidimensionals de continuïtat i de moviment en forma de diferències finites. El primer pas a fer és dibuixar un eix (eix x) seguint la direcció principal de simetria del llac i que és el que s'utilitza per resoldre les equacions de moviment. A continuació, es dibuixen seccions transversals a l'eix, igualment espaiades i amb un nombre que assegurí que l'àrea entre dues d'elles consecutives no canviï molt abruptament. Es defineixen llavors el paràmetres següents:

- Δx distància entre la secció $x-1$ i la secció x
- l longitud total de l'eix x
- S_x, b_x àrea i amplada (a la superfície del llac) de la secció a x
- v_x àrea, a la superfície del llac, entre les seccions $x-1$ i x
- η_x, ξ_x desplaçaments vertical i horitzontal de les partícules a la secció x
- q_x volumen d'aigua passant a través de la secció x

Les equacions unidimensionals de continuïtat i moviment són respectivament:

$$\frac{\partial (S\xi)}{\partial x} = -\eta b \quad (1)$$

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = -g \frac{\partial \eta}{\partial x} \quad (2)$$

L'equació (2) ens diu simplement que l'acceleració d'una partícula d'aigua és proporcional al pendent de la superfície lliure del seu damunt, essent g l'acceleració de la gravetat.

Si suposem moviment harmònic simple per a la coordenada ξ , de manera que $\xi = \xi_{\max} \cos 2\pi (t/T)$, on T és el període de la seca i diferenciem (2) tenim:

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = - \frac{4\pi^2}{T^2} \xi. \quad (3)$$

Si ara introduïm diferències finites a (2) tenim:

$$\eta_x = \eta_{x-1} + \alpha \xi, \quad (4)$$

on $\alpha = \Delta x(4\pi^2/gT^2)$, i assumint la linealitat de ξ :

$$\eta_x = \eta_{x-1} + (\xi_{x-1} + \xi_x)\alpha/2, \quad (5)$$

on els subíndexs x i $x-1$ es refereixen a dues seccions successives. Tenint en compte que l'increment de volum en el tros de llac entre dues seccions és aproximadament

$$\Delta q = v_x(\eta_{x-1} + \eta_x)/2, \quad (6)$$

el volum total d'aigua que passa per cada secció val:

$$q_x = q_{x+1} + \Delta q. \quad (7)$$

De la manipulació de les equacions anteriors deduïm:

$$\xi_x = \frac{-1}{(S_x + \alpha v_x/4)} [q_{x-1} + v_x (\eta_{x-1} + \alpha \xi_{x-1}/4)]. \quad (8)$$

Les equacions (5) (7) i (8) són les que utilitzarem en aquest mètode per determinar els períodes que porten a distribucions de ξ que satisfan les condicions de contorn que fan q_x zero als extrems del llac.

Seques internes

Suposem ara que tenim en el llac una capa superior de densitat ρ_1 i alçada h_1 i una d'inferior de densitat ρ_2 i alçada h_2 . Per calcular els períodes de les seques internes seguim el mateix procediment que abans, és a dir, escollim un eix x sobre l'eix de simetria del llac i hi dibuixem les seccions transversals. Definim ara les quantitats següents:

- b_i amplada d'una secció mesurada a la interfase.
- v_i àrea del llac entre seccions mesurada a la interfase.
- S_w superfície de la secció.
- S_1 superfície de la subsecció de densitat S_1 .
- S_2 superfície de la subsecció de densitat S_2 .

Les equacions de continuïtat i de moviment són llavors:

$$\frac{\partial (S_2 \xi_2)}{\partial x} = - \eta_i b_i \quad (9)$$

$$\frac{\partial^2 \xi_2}{\partial t^2} = -g (\rho_2 - \rho_1) \frac{S_1}{S_w \rho_2} \frac{\partial \eta_i}{\partial x}, \quad (10)$$

on ξ_2 és el desplaçament horitzontal a la subsecció 2 i η_i el desplaçament vertical de la interfase.

A continuació utilitzarem el mateix mètode que abans (equacions 5,7 i 8) però substituint g per $g(\rho_2 - \rho_1)S_1/\rho_2S_w$ i α per $\Delta x(4\pi^2S_w)\rho_2/T^2g(\rho_2 - \rho_1)S_1$. El procediment de càlcul és idèntic per a les seques externes i ens porta a trobar els valors de T que satisfan les condicions de contorn, és a dir que fan q_2 i ξ_2 zero als dos extrems del llac. Posat que, òbviament el nivell del llac no canviï tenim: $q_1 = -q_2$ i $\xi_1 = -\xi_2S_2/S_1$.

APLICACIÓ A L'ESTANY DE BANYOLES

Seques externes

A la Figura 1 veiem les 23 seccions amb les quals hem dividit l'estany per aplicar el mètode anterior. La longitud de l'estany és de 2.163 m i la distància entre seccions val 94,07 m. El procediment utilitzat per trobar els diferents períodes de les seques externes ha estat el següent: Partim d'un període T que pot ser el de la fórmula de Merian, $T = 2l/(gh)^{1/2}$, corresponent a l'harmònic fonamental per les ones estacionàries a un volum regular de longitud i fondària h ; en el nostre cas prendrem h com la fondària mitja de l'estany. A continuació donem uns valors d'entrada a los nostres variables a un extrem de l'estany (secció S_0):

$$q_0 = \xi_0 = 0; \eta_0 = 0.03 \text{ m.}$$

Calculem ara ξ_1 a la secció S_1 mitjançant (8), a continuació η_1 mitjançant (5) i q_1 utilitzant (7). Aquestes tres quantitats són utilitzades per calcular els corresponents paràmetres de la secció 2 i així successivament. Si quan arribem a l'altre extrem del llac trobem que $q = 0$ voldrà dir que el període escollit és el correcte. En cas contrari haurem de repetir el procediment amb un altre període. Utilitzant aquest procés reiteratiu anem trobant els períodes de les seques. La Figura 2 representa el cabal a última secció de l'estany per diferents períodes. És obvi que aquells períodes que donen cabal 0 són les solucions buscades. A la segona columna de la taula i trobem els períodes dels 10 primers harmònics des de 414,8 seg (6,9 min) per l'harmònic fonamental fins a 29,7 seg pel desè harmònic. A la figura 3 hi veiem representats el cabal q , (en $m^3 \times 300000$), el desplaçament vertical (en m) i el desplaçament horitzontal (en $m \times 10000$) per l'harmònic fonamental. Observem com a la secció 14, que és la que té la superfície més petita, li correspon un desplaçament horitzontal més gran.

Seques internes

Des de la primavera fins a la tardor l'estany presenta dues capes d'aigua clarament diferenciades en quant a temperatura i densitat: l'epilimnion, en contac-

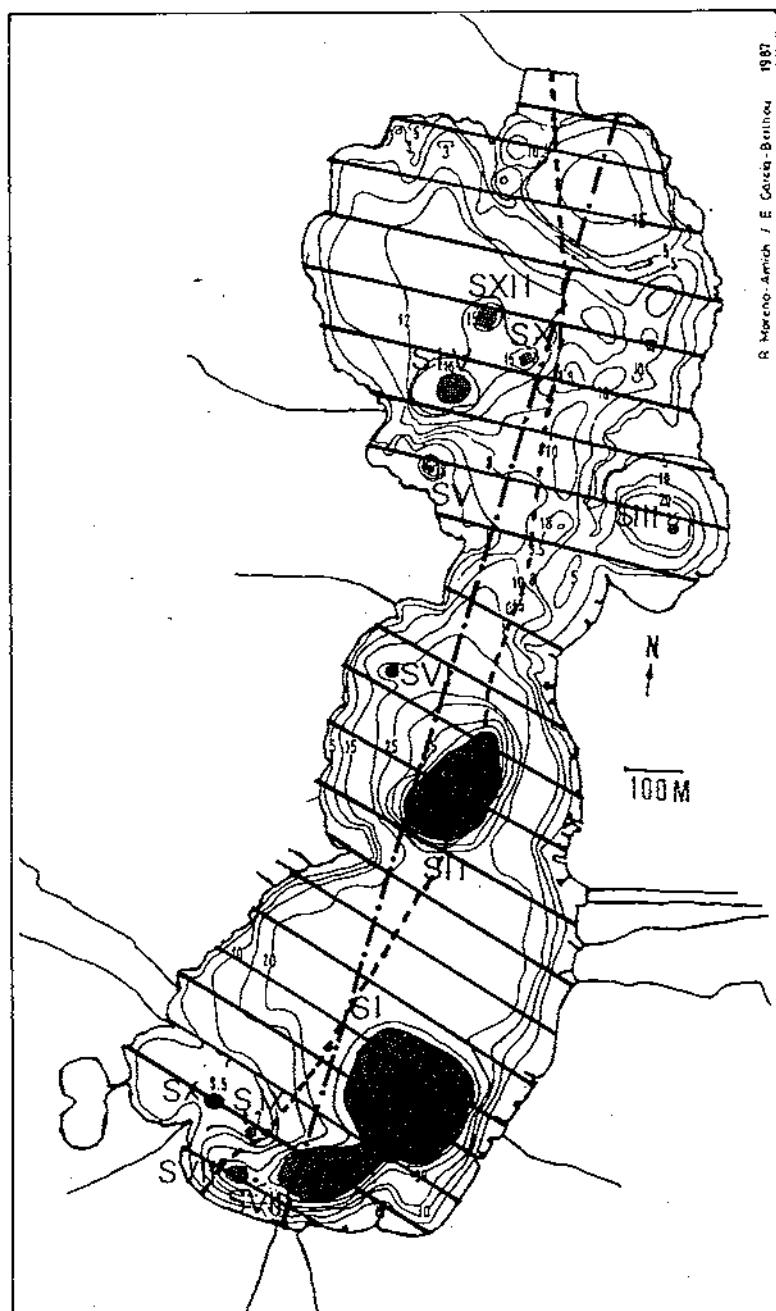


Figura 1. Mapa batimètric representant les 10 seccions en què s'ha dividit l'estany pel càlcul de les seques externes.

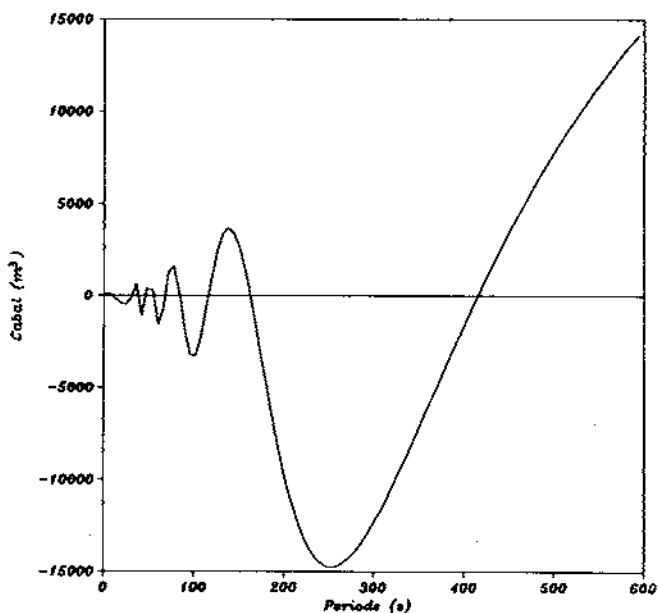


Figura 2. Representació gràfica del mètode iteratiu seguit pel càlcul dels períodes de les seques externes. Els punts de cabal 0 donen els períodes buscats.

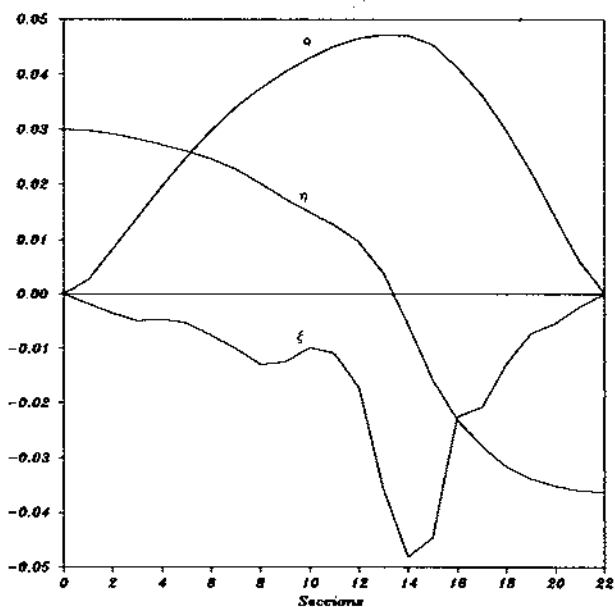


Figura 3. Superposició dels tres gràfics utilitzats pel càlcul de les seques externes. «q» representa el cabal ($m^3 \times 300000$), «η» el desplaçament vertical (m) i «ξ» el desplaçament horitzontal ($m \times 10000$) a cada secció.

te amb l'atmosfera i l'hipolímnion que s'estén fins al fons de l'estany. La interfase o termoclina és la zona de gradient brusc que separa ambdues capes. En el model que utilitzarem considerem una termoclina puntual situada als 8 m de manera que tot el gradient té lloc en un sol punt, i una diferència de densitat entre l'epilímnion i l'hipolímnion de $0,001 \text{ g/cm}^3$. Aquests valors corresponen a una situació típicament estiuenca, quan l'estratificació es troba completament desenvolupada. És interessant remarcar que amb aquestes hipòtesis no podem considerar l'estany com un tot, pel fet que molts punts tenen fondària inferior als 8 m, sinó que l'hem de considerar format per 4 zones diferents en cadascuna de les quals la interfase pot oscil·lar independentment (Fig 4).

Per trobar els períodes de les seques internes a la zona I s'aplica el mètode descrit anteriorment. Primer es divideix aquesta zona en seccions transversals i a continuació es donen valors per a la secció 0 idèntics que abans. Es tracta de trobar els períodes que facin possible que, tot seguint el procés iteratiu anteriorment descrit, s'arribi a la darrera secció amb $q = 0$. El període per iniciar la iteració pot ésser el d'un volum regular de longitud 1, que ve donat per l'expressió:

$$T^2 = 4l^2(h_1 + h_2)\rho_2/h_1h_2g(\rho_1 - \rho_2).$$

Els resultats dels 5 primers períodes els trobem a la taula 1. A la figura 5 tenim una representació del cabal ($\text{m}^3 \times 100000$) i del desplaçament vertical a cada secció. A la figura 6 s'hi representa el desplaçament horitzontal a cada capa. Les figures 7 i 8 representen el mateix, però per a la zona II. Aquest mateix procediment aplicat a les seccions III i IV dóna els períodes restants de la taula 1.

Taula 1. Períodes corresponents a les seques externes en segons.

Període	Seques externes	Seques internes ZONA I	Seques internes ZONA II	Seques internes ZONA III	Seques internes ZONA IV
1	414,8	9742,0	6816,6	3634,3	2099,8
2	162,6	5030,3	4043,8	1816,5	972,9
3	116,2	3481,6	2644,9	1103,4	483,3
4	84,2	2659,7	1731,5	748,2	186,7
5	68,1	2093,1	1205,2	428,5	—
6	54,9	—	—	—	—
7	47,0	—	—	—	—
8	39,0	—	—	—	—
9	33,9	—	—	—	—
10	29,7	—	—	—	—

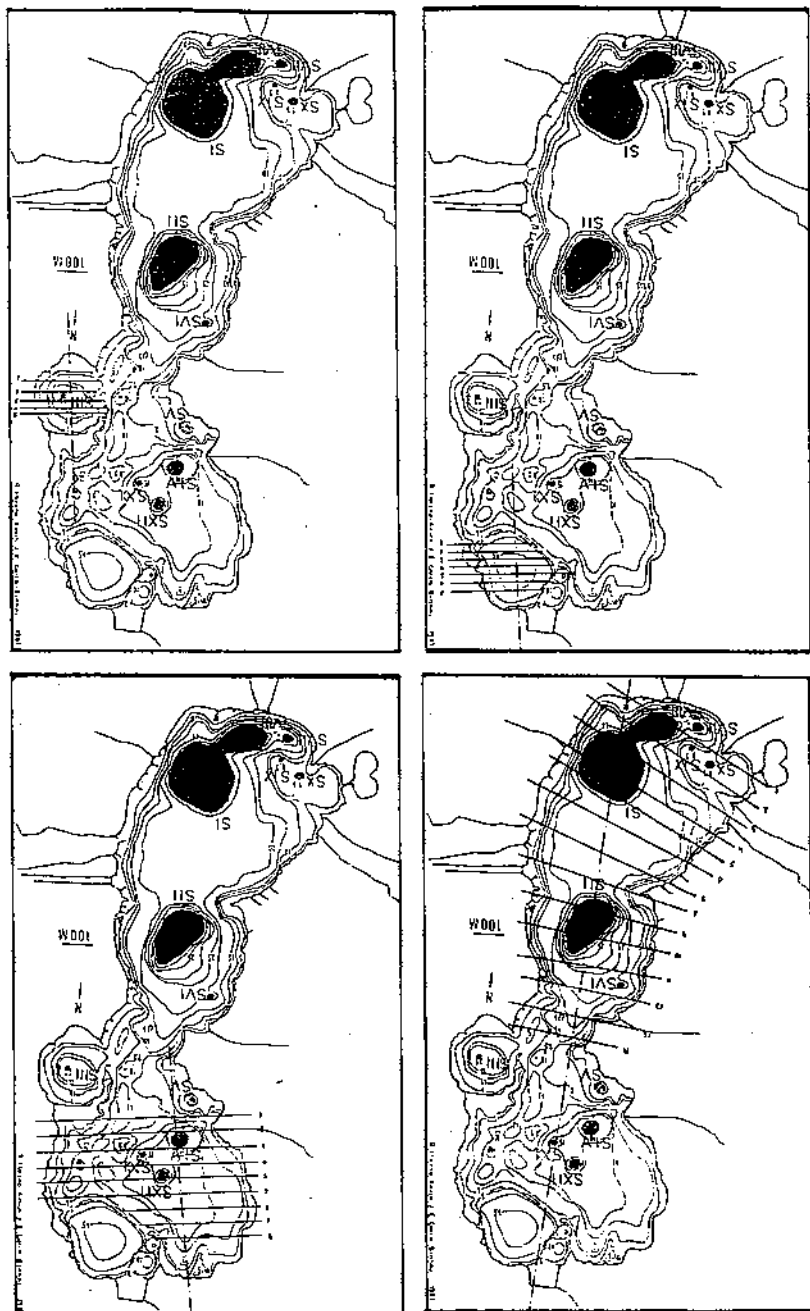


Figura 4. Les quatre zones en què s'ha dividit l'estany pel càlcul de les seques internes indicant en cada una les seccions utilitzades.

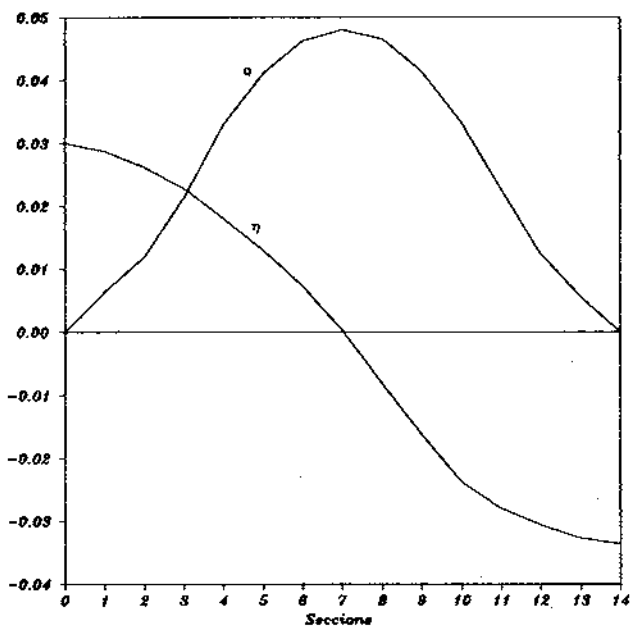


Figura 5. Superposició del gràfic del cabal «q» ($m^3 \times 10000$) i del desplaçament vertical «η» (m) a cada secció pel càlcul de les seques internes a la secció I.

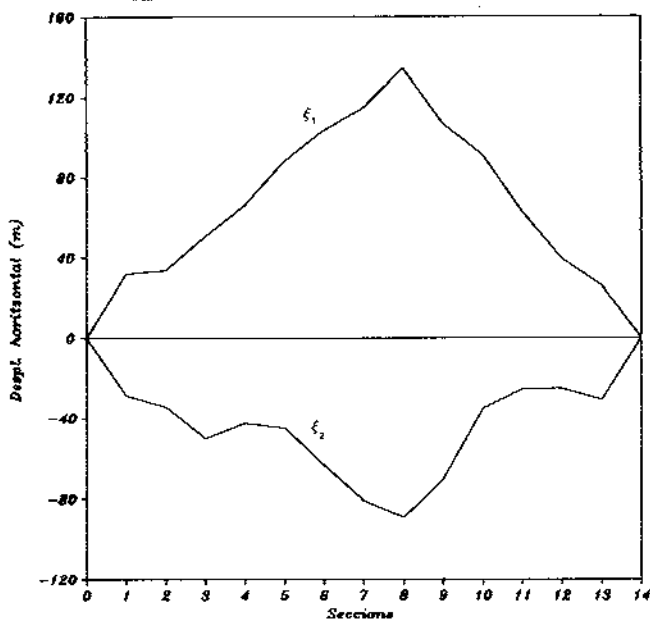


Figura 6. Desplaçaments horitzontals a cada secció per la capa superior o epilimnion (ξ_1) i per la capa inferior o hipolimnion (ξ_2) a la secció I.

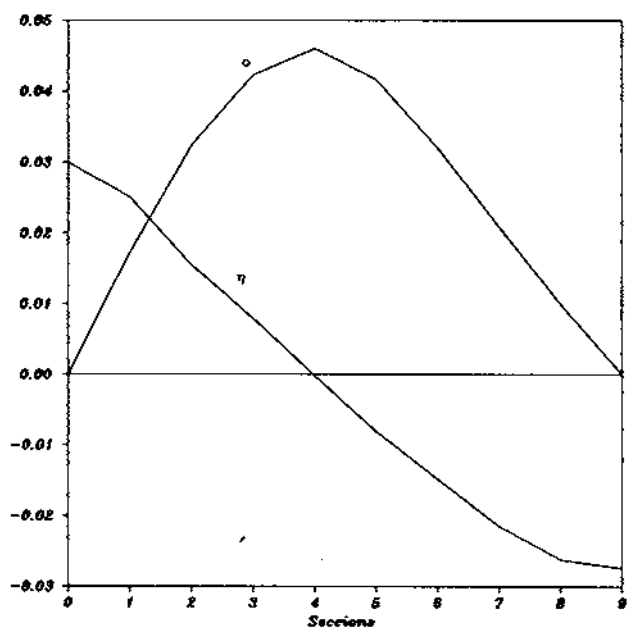


Figura 7. Superposició del gràfic del cabal «q» ($m^3 \times 10000$) i del desplaçament vertical «η» (m) a cada secció pel càlcul de les seques internes a la secció II.

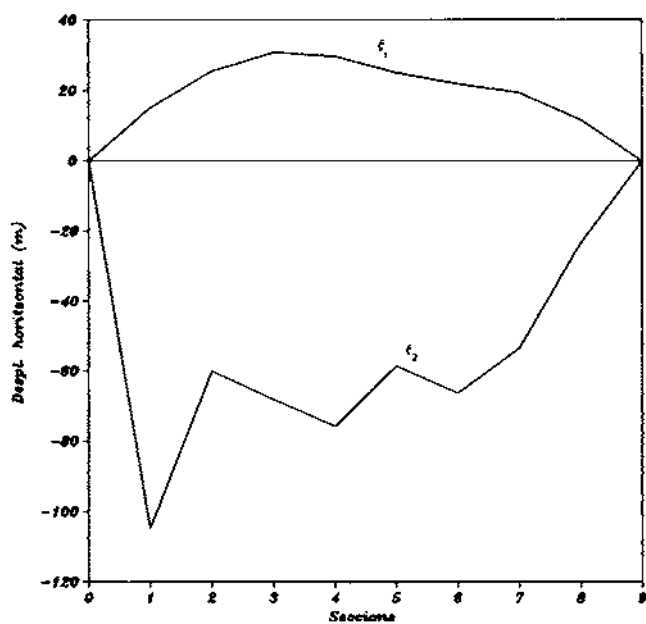


Figura 8. Desplaçaments horitzontals a cada secció per la capa superior o epilimnion (ξ_1) i per la capa inferior o hipolimnion (ξ_2) a la secció I.

Bibliografia

- DEFANT, A. (1918). Neue Methode zur Ermittlung der Eigenschwingungen (Seiches) von abgeschlossenen Wassermassen. *Ann. Hydrogr. Berlin*, 46: 78-85.
- MORTIMER, C.H. (1979). Strategies for coupling data collection and analysis with dynamic modelling of lake motions. In *Hydrodynamics of lakes*. Elsevier. Amsterdam.