ALGUNAS PROPIEDADES TOPOLOGICAS DE LOS GRAFOS

E.Llorens Fuster

Departamento de Matemáticas

RESUMEN

Se define, sobre el conjunto soporte de cualquier grafo, una colección de topologías, que permiten expresar en sus términos, ciertas propiedades del grafo, como la estabilidad y la conexión.

INTRODUCCION

Para tratar de expresar, en términos topológicos, ciertas características de las grafos, se define, para cada correspondencia $\Gamma : X \longrightarrow X$, una colección de topologías sobre X, que reflejen las propiedades de Γ, y que salvo excepciones resultan ser no T_1. A su estudio se dedica la sección 1.

La construcción anterior conduce al estudio de una clase especial de grafos, próxima a los transitivos, que se realiza en 2 reservándose la tercera parte al análisis de las relaciones entre la estabilidad interna y externa, la conexión en sus mas usuales versiones, y la simetría, con las nociones topológicas introducidas en 1, independientes del punto de vista adoptado en (7). Resulta existir equivalencia entre la conexión debil de un grafo y la conexión en una de las topologías introducidas.

Toda la terminología de Teoría de Grafos, se emplea en el mismo sentido que (1).

1.: TOPOLOGIAS $\mathcal{A}(p,\Gamma)$

1.1.: CONSTRUCCION

Sea (X,Γ) un grafo cualquiera. Dado un elemento $x\in X$, se define:

$$\mathcal{E}_x^p = \{V_p(x)\in 2^X : \{x\} \cup \Gamma^p(x) \subset V_p(x)\}$$

Se tiene entonces:

1.1.1: Si $S\in\mathcal{E}_x^p$ y $S'\in\mathcal{E}_x^p$, entonces $S\cap S'\in\mathcal{E}_x^p$

1.1.2.: Si $S\in\mathcal{E}_x^p$ y $S\subset U$, entonces $U\in\mathcal{E}_x^p$.

1.1.3.: Si $S\in\mathcal{E}_x^p$, entonces $x\in S$.

Para cada ordinal p y para cada aplicación multivaluada Γ, puede definirse una subfamilia de 2^X

$$\mathcal{A}(p,\Gamma) = \{U\in 2^X : U\in\mathcal{E}_x^p \text{ para cada } x\in U\} .$$

1.2.: TEOREMA

Para cada ordinal p y cada aplicación multivaluada $\Gamma : X \longrightarrow X$, la familia $\mathcal{A}(p,\Gamma)$ constituye una topología sobre X.

La demostración es simple consecuencia de la difinición.

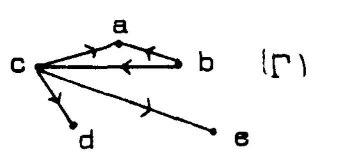
Nótese que $\mathcal{E}_x^p$ no constituye un sistema fundamental de entormos de x para dichas topologías, pues para ello debería verificarse la condición suplementaria:

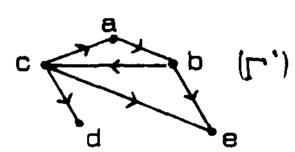
1.2.1.: Si $U\in\mathcal{E}_x^p$ $\exists V\in\mathcal{E}_x^p$ tal que $V\subset U$ y $V\in\mathcal{E}_x^p$ $\forall x\in V$.

Se verá posteriormente que no es satisfecha en general.

1.3.: OBSERVACION

No es cierto en general que si $(X,\Gamma)\neq(X,\Gamma')$ entonces $\mathcal{A}(p,\Gamma)\neq\mathcal{A}(p,\Gamma')$. Así para los sencillos grafos de las figuras:





$$\mathcal{A}(1,\Gamma) = \mathcal{A}(1,\Gamma') = \{ \{d\}, \{e\} , \{d,e\}, X , \emptyset \}$$

Ello justifica la siguiente:

1.4.: DEFINICION

Dos aplicaciones multívocas $\Gamma : X \longrightarrow X$ $\Gamma' : X \longrightarrow X$, y por extensión los grafos (X,Γ) y (X,Γ'), son p-equivalentes si y sólo si $\mathcal{A}(p,\Gamma) = \mathcal{A}(p,\Gamma')$. Escribiremos en tal caso $(X,\Gamma) \overset{p}{\sim} (X,\Gamma')$.

1.5.: TEOREMA

Un conjunto $U\subset X$ es $\mathcal{A}(p,\Gamma)$-abierto si y sólo si $\Gamma^p(U)\subset U$.

Demostración:

$$\Gamma^p(U)\subset U \iff \forall\, x\in U,\ \Gamma^p(x)\subset U \iff \forall x\in U,\ U\in\mathcal{E}_x^p \iff U\in\mathcal{A}(p,\Gamma).$$

1.6.: COROLARIO

Si $U\subset X$ es $\mathcal{A}(p,\Gamma)$-abierto, entonces $\forall k\in I^+$ $\Gamma^{k\cdot p}(U)\subset U$.

1.7.: COROLARIO

$\mathcal{N}(1,\Gamma) \subset \mathcal{N}(k,\Gamma)$, $\forall\, k \in I^{+}$.

En adelante, siempre que no sea necesario hacer espectal mención de Γ ,se escribira $\mathcal{N}(1,\Gamma) \equiv \mathcal{N}(\Gamma)$.

1.8.: COROLARIO

$\mathcal{N}(p,\Gamma) \subset \mathcal{N}(k.p,\Gamma)$ $\forall k,p \in I^{+}$.

1.9.: TEOREMA

Para todo vértice $x \in X$, el cierre transitivo $\hat{\Gamma}(x) = \{x\} \cup \Gamma(x) \cup \Gamma^2(x) \cup \ldots$ de x, es $\mathcal{N}(p,\Gamma)$-abierto, $\forall p \in I$.

Demostración:

Obviamente $\Gamma^p(\hat{\Gamma}(x)) = \Gamma^p(x) \cup \Gamma^{p+1}(x) \cup \ldots \subset \hat{\Gamma}(x)$, y el teorema se sigue de 1.5.

1.10.: TEOREMA

Sea $U \subset X$. Si $\Gamma^p(U) = \emptyset$/,entonces U es $\mathcal{N}(p,\Gamma)$-abierto.

Denostfación:

Es inmediata sin mas que considerar que $\Gamma^p(U) = \emptyset \subset U$.

1.11.: TEOREMA

Si $\{x\} \subset X$ es $\mathcal{N}(p,\Gamma)$ abierto, entonces y sólo entonces $\Gamma^p(x) = \emptyset$ o $\Gamma^p(x) = \{x\}$.

Demostración:

En efecto, pues por 1.5. $\Gamma^p(x) \subset \{x\}$.

1.12.: TEOREMA

Existen en todo grafo los conjuntos que permiten definir funcioner ordinales:

$X(0) = \{x \in X : \Gamma(x) = \emptyset\}$

$X(1) = \{x \in X : \Gamma(x) \subset X(0)\}$

$X(2) = \{x \in X : \Gamma(x) \subset X(1)\}$

...

a si ω es un ordinal límite

$X(\omega) = \bigcup_{\alpha < \omega} X(\alpha)$.

En estas condiciones se tiene que, si α es un ordinal, $X(\alpha)$ es $\mathcal{N}(p,\Gamma)$-abierto $\forall p \in I$.

Demostración:

Sea α un ordinal no límite.Es fácil ver que $\Gamma^p(X(\alpha)) \subset X(\alpha - p)$. Si $\alpha = p$, $\Gamma^p(X(\alpha)) \subset X(\alpha - p) = X(0) \subset X(\alpha)$, por lo que $X(\alpha)$ es $\mathcal{N}(p,\Gamma)$-abierto. Si $\alpha > p$ $\Gamma^p(X(\alpha)) \subset X(\alpha - p) \subset X(\alpha)$, igualmente. Si $\alpha < p$ $\Gamma^p(X(\alpha)) = \emptyset \subset X(\alpha)$ como en los casos anteiores.

Si α es un ordinal límite será abierto por ser reunión de abiertos.

Enunciamos sin demostración teoremas de caracterización de $\mathcal{N}(p,\Gamma)$ cerrados:

1.13.: TEOREMA

$F \subset X$ es $\mathcal{N}(p,\Gamma)$-cerrado si y sólo si $\Gamma^p(X-F) \cap F = \emptyset$.

1.14.: TEOREMA

Σ X es $\mathcal{N}(\Gamma)$-cerrado si y sólo si no hay ningún arco incidente a él, desde su complementario,o equivalentemente si y sólo si $\Gamma^{-1}(F) \subset F$.

1.15.: TEOREMA

$F \subset X$ es $\mathcal{N}(p,\Gamma)$-cerrado si y sólo si $\Gamma^{-p}(F) \subset F$.

1.16.: TEOREMA

Sea (X,Γ) un grafo cuyo soporte es $\mathcal{R}(1,\Gamma)$-T_1. Entonces y sólo entonces no existe ningún Γ-arco que una vértices distintos.

Demostración:

Si todo punto es cerrado y existe un arco (x,y), con $x\neq y$, entonces $\Gamma^{-1}(y)\not\subset \{y\}$, por lo que se contradice a 1.14.

Recíprocamente si en X no existen Γ-arcos de la forma anterior, o bien $\Gamma^{-1}(x)=\emptyset$ o $\Gamma^{-1}(x)=\{x\}$. En ambos casos, por 1.14, se obtiene que X es $\mathcal{R}(\Gamma)$-T_1.

1.17.: TEOREMA

Si (X,Γ) es un grafo cuyo soporte es $\mathcal{R}(p,\Gamma)$-T_1 $(p\in I^+)$. Entonces y sólo entonces sus Γ-arcos se reducen a circuitos sin bucles cuya longitud es divisor de p, o a caminos de longitud estrictamente inferior a p.

La demostración es análoga a la del anterior.

1.18.: TEOREMA

Sea (X,Γ) un grafo y $A\subset X$. Si $x\in X$ es punto de acumulación de A para la topología $\mathcal{R}(p,\Gamma)$, entonces x tiene descendientes en A.

Demostración:

$\hat{\Gamma}(x)$ es $\mathcal{R}(p,\Gamma)$-entorno de x (1.9), luedo deberá cumplirse que $(\hat{\Gamma}(x)-\{x\})\cap A \neq \emptyset \implies \exists n\in I^+$ tal que $\Gamma^n(x)\cap A \neq \emptyset$.

1.19.: TEOREMA

Sea (X,Γ) un grafo y $A\subset X, A\neq\emptyset$. Si $x\in X-A$ tiene en A descendientes de orden k.p entonces x es punto de acumulación de A para la topología $\mathcal{R}(p,\Gamma)$ $(k,p\in I^+)$.

Demostración

Si x no es punto de $\mathcal{R}(p,\Gamma)$-acumulación de A, existe un $\mathcal{R}(p,\Gamma)$-abierto U tal que

$x\in U$ y $(U-\{x\})\cap A=\emptyset$/ por lo que se tiene que $U\cap A=\emptyset$. Como $x\in U$ y tiene en A descendientes de órden k.p, se llega a una contradicción con 1.5.

2.: SOBRE UNA ESPECIAL CLASE DE GRAFOS

Se vió anteriormente que el conjunto $\{x\}\cup\Gamma^p(x)$ no necesariamente es $\mathcal{R}(p,\Gamma)$-abierto. Nos proponemos estudiar los grafos que verifican algunas de las propiedades

$$P_i:\qquad \forall x\in X,\quad \{x\}\cup\Gamma^{i}(x)\in\mathcal{R}(i,\Gamma).\quad (i\in I^+).$$

2.1.: TEOREMA

Todo grafo transitivo cumple las porpiedades P_i para cada $i\in I^+$.

Demostración:

Si (X,Γ) es transitivo, $\forall x\in X$, $\Gamma^2(x)\subset\Gamma(x)$, lo que implica que $\Gamma^{2p}(x)\subset\Gamma^p(x)$, $\forall x\in X$, $\forall p\in I^+$. Entonces, $\forall x\in X$, $\forall p\in I^+$,

$$\Gamma^{2p}(x)\cup\Gamma^p(x)=\Gamma^p(x)\implies\Gamma^{2p}(x)\cup\Gamma^p(x)\subset\Gamma^p(x)\cup\{x\}\implies$$

$$\Gamma^p(\Gamma^p(x)\cup\{x\})\subset\Gamma^p(x)\cup\{x\}$$

lo que, en virtud de 1.5 completa la prueba.

2.2.: TEOREMA

Todo grafo que verifica P_i y que es reflexivo, es transitivo.

La demostración es simple consecuencia de las definiciones.

2.3.: TEOREMA

Si el grafo (X,Γ) carece de bucles y de circuitos, y todos sus caminos son de longitud inferior a 2i ($i\in I$), entonces verifica P_i.

Demostración:

$\forall x\in X,\ \Gamma^p(x) \cup \Gamma^{2p}(x) = \Gamma^p(\{x\} \cup \Gamma^p(x))$. Como por hipótesis $\Gamma^{2i}(x) = \emptyset$, se obtiene que

$\forall x\in X,\ \Gamma^i(\{x\} \cup \Gamma^i(x)) = \Gamma^i(x) \subset \{x\} \cup \Gamma^i(x)$. La tesis se sigue ahora de 1.5.

2.4.: TEOREMA

Sea (X,Γ) un grafo que verifica P_i para algún $i\in I^*$. Sea $A\subset X$. Si $x\in X$ es punto de $\mathcal{A}(i,\Gamma)$-acumulación de A, entonces tiene en él descendientes de orden i.

Demostración

Como $\{x\} \cup \Gamma^i(x)$ es por hipótesis $\mathcal{A}(i,\Gamma)$-entorno de x contenido en cualquiera otro, entonces puede afirmarse que la condición

$((\{x\} \cup \Gamma^i(x)) - \{x\}) \cap A \neq \emptyset$

es necesaria y suficiente para que x sea punto de acumulación de A. Por lo tanto, $\Gamma^i(x) \cap A \neq \emptyset$, lo que prueba el teorema.

2.5.: TEOREMA

Sea (X,Γ) un grafo que verifica P_i para algún $i\in I$. Sea $A\subset X$. Si $x\in X-A$ tiene en A descendientes de orden i, entonces y soolo entonces es punto de $\mathcal{A}(i,\Gamma)$-acumulación de A.

La demostración se sigue del teorema anterior y del 1.18.

3.: EXPRESION TOPOLOGICA DE CIERTAS PROPIEDADES DE UN GRAFO

3.1.: TEOREMA

Dado un grafo (X,Γ), si U es un subconjunto de X interiormente estable y $\mathcal{A}(\Gamma)$-abierto, entonces y solo entonces $\Gamma(U)= \emptyset$.

Demostración:

Si U es i.e., por definición $\Gamma(U) \cap U= \emptyset$. Al ser U $\mathcal{A}(\Gamma)$-abierto, $\Gamma(U)\subset U$, por 1.5. La conclusión es ahora evidente.

3.2.: TEOREMA

Dado un grafo (X,Γ), si T es un subconjunto de X exteriormente estable y $\mathcal{A}(\Gamma)$-cerrado, entonces y sólo entonces $T= X$.

Demostración:

Si T es exteriormente estable ((1) 4,p58), $X-T\subset\Gamma^{-1}(T)$. Si T es $\mathcal{A}(\Gamma)$-cerrado (1.14), $\Gamma^{-1}(T)\subset T$. La conclusión es ahora evidente.

3.3.: TEOREMA

Sea (X,Γ) un grafo y $T\subset X$, no vacío y exteriormente estable. Entonces X es la $\mathcal{A}(\Gamma)$-clausura de T.

Demostración:

Si $x\in X-T$, por ser T e.e., $\Gamma(x) \cap T\neq \emptyset$, es decir x tiene descendientes (de orden 1) en T. Por 1.18, x es punto de $\mathcal{A}(\Gamma)$-acumulación de A. Por lo tanto $X-T \subset Ac.(T) \Rightarrow X\subset Ac.(T) \cup T \Rightarrow X = Ac.(T)\cup T$.

Si T es denso en X para $\mathcal{A}(\Gamma)$, podemos adirmar que si $x\in X-T$, tiene descendientes en T, pero no necesariamente son de orden 1. No obstante

3.4.: TEOREMA

Si (X,Γ) cumple la propiedad P_1 y $T\subset X$ es $\mathcal{A}(\Gamma)$-denso en X, entonces T es exteriomente estable.

La demostración es simple consecuencia de 1.19.

3.5.: DEFINICION ((4) 1.7.2).

Un grafo (X,Γ) es:

3.5.1.:Fuertemente conexo si $\forall\,(x,y)\in X^2$, con $x\neq y$, existe en él un camino con extremidad inicial x, y extremidad final y.

3.5.2.:Semifuertemente conexo si $\forall\,(x,y)\in X^2$, con $x\neq y$, existe en él un camino que los une.

3.5.3.:Cuasifuertemente conexo, si $\forall\,(x,y)\in X^2$ con $x\neq y$, extisten puntos $z,z'\in X$, tales que los caminos $\gamma(x,z)$ $\gamma(y,z)$ o los $\gamma(z',x)$ $\gamma(z',y)$ figuran en el grafo.

3.5.4.:Debilmente conexo, si $\forall\,(x,y)\in X$, con $x\neq y$, existe en él una cadena que une x con y.

3.6.: TEOREMA

Sea (X,Γ) un grafo. Toda componente débilmente conexa de X, es $\mathcal{R}(\Gamma)$-abierto y $\mathcal{R}(\Gamma)$ cerrado.

Demostración

Sea C una tal componente débilmente conexa.Si $z\in\Gamma(C)$,entonces puede ser unido a cualquier vértice de C por una cadena.

$C\cup\{z\}$ será entonces débilmente conexo, pero como C es maximal, necesariamente $C\cup\{z\}=C$ y por tanto z C.Se ha visto pues que $\Gamma(C)\subset C$, lo que, en virtud de 1.5 equivale a que C es abierto.

Si $z\in\Gamma^{-1}(C)$, entonces también puede ser unido a cualquier vértice de C por una cadena, y del mismo modo se prueba que $\Gamma^{-1}(C)\subset C$, es decir, que C es cerrado.

3.7.: TEOREMA

Sea (X,Γ) un grafo.Toda componente débilmente conexa de X es $\mathcal{R}(p,\Gamma)$-abierto y $\mathcal{R}(p,\Gamma)$-cerrado.

Demostración

Es idéntica a la anterior.

3.8.: TEOREMA

Si X es $\mathcal{R}(\Gamma)$-conexo, entonces es un grafo débilmente conexo.

Demostración

Caso contrario existirían dos vértices distintos x;y, que no podrían ser unidos mediante una cadena. Si C es la componente débilmente conexa que contiene a x, por el teorema anterior se tiene que es $\mathcal{R}(\Gamma)$-abierto y $\mathcal{R}(\Gamma)$-cerrado, y además $y\notin C$. Luego, C es no vacío abierto cerrado y distinto de X. Por lo tanto X no sería $\mathcal{R}(\Gamma)$-conexo.

3.9.: LEMA

Sea (X,Γ) un grafo.Sea $x\in X$, y $\hat{\Gamma}^{-1}(x)$ el conjunto de todos los antecesores de x unido al $\{x\}$.Si x no puede ser unido a $y\in X$ mediante una cadena, entonces y sólo entonces se verifican simultáneamente las igualdades

$$\hat{\Gamma}(x)\cap\hat{\Gamma}(y)=\emptyset$$

$$\hat{\Gamma}(x)\cap\hat{\Gamma}^{-1}(y)=\emptyset$$

$$\hat{\Gamma}^{-1}(x)\cap\hat{\Gamma}(y)=\emptyset$$

$$\hat{\Gamma}^{-1}(x)\cap\hat{\Gamma}^{-1}(y)=\emptyset.$$

La demostración es innecesaria, pues caso contrario x podría ser undo a y mediante una cadena.

3.10.: TEOREMA

Sea (X,Γ) un grafo débilmente conexo. Entonces X es $\mathcal{A}(\Gamma)$-conexo,

Demostración

Si X no fuera $\mathcal{A}(\Gamma)$-conexo, existirían subconjuntos propios $A,B \subset X$, no vacíos y simultáneamente $\mathcal{A}(\Gamma)$-abiertos y $\mathcal{A}(\Gamma)$-cerrados tales que $A\cup B= X$ $A\cap B= \emptyset$.

Existen por tanto elementos $x\in A$ $y\in B$, tales que $\hat{\Gamma}(x)\subset A$, $\hat{\Gamma}^{-1}(x)\subset A$, $\hat{\Gamma}(y)\subset B$, $\hat{\Gamma}^{-1}(y)\subset B$.

Se verifican por tanto las condiciones del lema anterior,lo que equivale a afirmar que x no puede ser unido a y mediante ninguna cadena, y que por tanto (X,Γ) no es débilmente conexo, contra la hipótesis.

3.11.: COROLARIO

Todo grafo fuertemente conexo (semifuertemente conexo, cuasi-fuertemente conexo) es $\mathcal{A}(\Gamma)$-conexo.

3.12.: TEOREMA

En un grafo simétrico no existen mas $\mathcal{A}(\Gamma)$-abiertos que X, $\emptyset$ las componentes débilmente conexas y sus reuniones.

Demostración:

Sea U un $\mathcal{A}(\Gamma)$-abierto no vacío estrictamente contenido en X. Sea y $X-U$.Si y pudiera ser unido a algún elemento de U por una cadena, por la simetría del grafo sería descendiente de algún elemento de U lo cual contradice a 1.5.

Por lo tanto U contiene a todos sus decendientes y ascendientes, siendo pues una componente debilmente conexa.

Se ha probado ya que toda componente debilmente conexa es $\mathcal{A}(\Gamma)$-abierto.

3.13.: TEOREMA

Si X es $\mathcal{A}(p,\Gamma)$-conexo, entonces (X,Γ) es debilmente conexo.

Demostración:

Aunque pueda ser reproducida literalmente la de 3.9., al ser la topología $\mathcal{A}(\Gamma)$ menos fina que la $\mathcal{A}(p,\Gamma)$, si $(X;\Gamma)$ fuera no debilmente conexo sería no $\mathcal{A}(\Gamma)$-conexo, y en tal caso sería no $\mathcal{A}(p,\Gamma)$-conexo, contra la hipótesis.

BIBLIOGRAFIA

(1) Claude BERGE: "Teoría de las redes y sus aplicaciones". C.E.C.S.A. Mexico, 1.962.

(2) Bernard ROY: "Algebre Moderne et Theorie des Graphes" Ed. Dunod, París, 1.972.

(3) G.Desbrazelle: "Exercices et Problemes de Recherche Operationelle" Dunod,París, 1.972.

(4) P.COMPOINT: "Les Graphes en Recherche Operationelle:Ensembles Remarquables et Algorithmes de Tatonement" Dunod, París,1.972.

(5) Claude FLAMMENT: "Teoría de Grafos y Estructuras de Grupo" Tecnos, Madrid, 1.972.

(6) J.Kelley: "Topología General"Eudeba, Buenos Aires, 1.955.

(7) ATIYAH-Mc.DONALD: "Algebra Conmutativa" Reverté Barcelona 1.974.